

Глава 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СООРУЖЕНИЙ КОНСОЛЬНОГО ТИПА. ПРИВЕДЕНИЕ СООРУЖЕНИЙ К КОНСОЛЬНОМУ ТИПУ

2.1. Описание движения массивного стержня

Пусть дан массивный стержень (рис. 2.1), совершающий движение под действием внешней нагрузки. Рассмотрим равновесие малого элемента этого стержня длиной dz . К нему приложены: внешняя нагрузка, сила сопротивления движению F и инерционная сила I . Сила сопротивления движению, согласно гипотезе внутреннего трения (гипотезе Фойгта) пропорциональна скорости движения и направлена в сторону, противоположную перемещению:

$$F = c (\partial w / (\partial t)), \quad (2.1)$$

где c - коэффициент пропорциональности, $\partial w / (\partial t)$ - скорость движения, w - перемещение, t - текущее время.

В эту же сторону направлена и сила инерции, которая в соответствии с принципом Д'Аламбера и известным законом Ньютона пропорциональна ускорению движения:

$$I = m(\partial^2 w / (\partial t^2)), \quad (2.2)$$

где m - масса единицы длины стержня, $\partial^2 w / (\partial t^2)$ - ускорение движения.

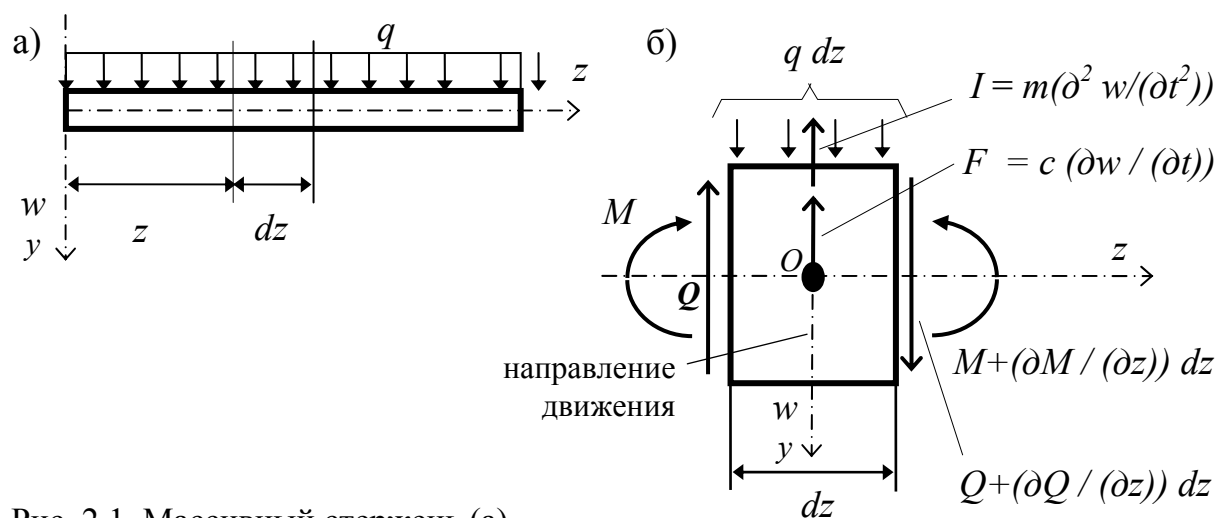


Рис. 2.1. Массивный стержень (а)
и его элемент (б)

Силы, приложенные к элементу, заменяют внешнюю среду, включая и инерционную, поэтому можно рассматривать равновесие невесомого элемента в пустоте. Для плоской системы сил запишем три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma z &= 0, \\ \Sigma y &= \frac{\partial Q}{\partial z} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c \frac{\partial w}{\partial t} + q = 0, \\ \Sigma m_o &= \frac{\partial M}{\partial z} = Q. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Известно геометрическое соотношение (ρ - радиус кривизны) для стержня:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M}{EI}.$$

после подстановки его во второе уравнение (2.3) и несложных преобразований получим ($EI = \text{const}$) **уравнение движения массивного стержня постоянного сечения**:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = q. \quad (2.4)$$

2.2. Решение уравнения движения массивного стержня

Решение полученного уравнения (2.4) будем искать в традиционном порядке. Сначала найдем решение однородного уравнения

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (2.5)$$

Это уравнение соответствует свободным колебаниям стержня (отсутствуют внешние силы $q = 0$). Его решение представим в виде разложения в ряд, в котором суммируются произведения функции $w_i(z)$, зависящей только от координаты, и $\Phi_i(t)$ - зависящей от времени:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(z) \cdot \Phi_i(t). \quad (2.6)$$

Если каждый член разложения (2.6) удовлетворяет уравнению (2.5), то полная сумма является его решением.

То есть, после подстановки произведения $w_i \cdot \Phi_i$ в (2.5) получим

$$EI \frac{d^4 w_i}{dz^4} \Phi_i + m \cdot w_i \frac{d^2 \Phi_i}{dt^2} + c \cdot w_i \frac{d \Phi_i}{dt} = 0$$

или после разделения переменных:

$$EI \frac{1}{m \cdot w} \cdot \frac{d^4 w_i}{dz^4} = - \frac{\frac{d^2 \Phi_i}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot \frac{d \Phi_i}{dt}}{\Phi_i} = -\omega^2. \quad (2.7)$$

Левая часть уравнения (2.7) не зависит от времени, а правая – от координаты. Равенство может сохраняться, если каждая из них - величина постоянная. Обозначим её ω^2 . Приравняв каждую часть (2.7) постоянной величине, получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^4 w}{dz^4} - m \cdot \omega^2 w &= 0, \\ \ddot{\Phi} + 2\alpha \cdot \dot{\Phi} + \omega^2 \Phi &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

(здесь отброшен значок i , заменены производные по времени традиционными обозначениями $\frac{d^2 \Phi}{dt^2} = \ddot{\Phi}$; $\frac{d \Phi}{dt} = \dot{\Phi}$ и введена постоянная $2\alpha = c/m$).

Второе уравнение в (2.8) называют **временным уравнением**. Оно имеет известное решение¹ (рис. 2.2):

$$\Phi = A \cdot \exp(-\alpha t) \cdot \sin(\varpi t + \varphi), \quad (2.9)$$

где A и φ - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий движения; $A \cdot \exp(-\alpha t)$ - амплитуда колебаний, затухающая со временем (при $t \rightarrow \infty$ величина $A \cdot \exp(-\alpha t) \rightarrow 0$), φ - начальная фаза движения (при $t = 0$ величина $\Phi = A \cdot \sin \varphi$), $\varpi^2 = \omega^2 - \alpha^2$ - круговая частота колебаний - количество колебаний в 2π секунд (количество колебаний в секунду - количество герц - равно частному от деления круговой частоты ϖ на 2π - $n = \varpi / 2\pi$).

¹ Бронштейн И.В., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. - М.: Гос. изд. технико-теоретич. лит-ры, 1956.

Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976.

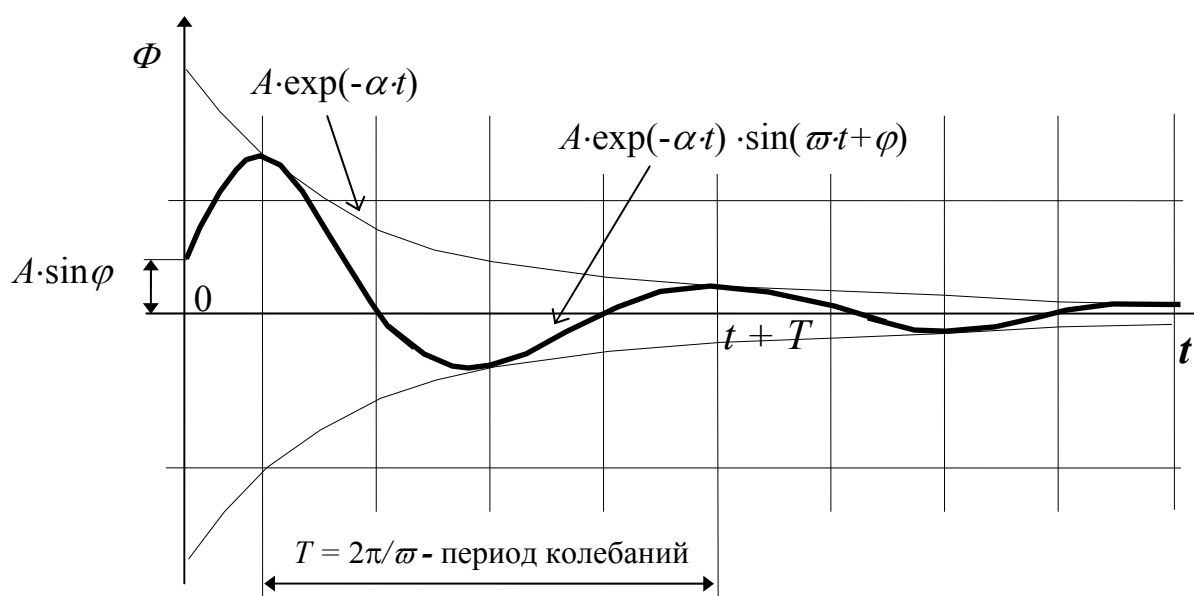


Рис. 2.2. График решения временного уравнения

2.3. Частоты и формы колебаний

Первое уравнение (2.8) называют *уравнением форм колебаний* или *частотным уравнением*. При постоянной по длине жесткости стержня и массе оно имеет решение²

$$w = A \operatorname{ch}(sz) + B \operatorname{sh}(sz) + C \cos(sz) + D \sin(sz), \quad (2.10)$$

$$\text{где } s = \sqrt[4]{\frac{m \omega^2}{EI}};$$

A, B, C, D - постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

В постановке и решении конкретных задач по определению динамических характеристик необходимо уметь формулировать начальные и граничные условия для стержней. На примерах покажем процедуру определения динамических характеристик с использованием уже полученных решений.

Пример 2.1. Определить частоты и формы колебаний защемленного по двум концам стержня постоянного поперечного сечения длиной l .

² Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976.

Р е ш е н и е . Запишем граничные условия для уравнения (2.10):

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z=0 - \quad w_0 = \frac{dw_0}{dz} = 0, \\ \text{при } z=l - \quad w_l = \frac{dw_l}{dz} = 0. \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

Из этих условий получим систему четырех уравнений для определения четырех постоянных A, B, C, D :

$$\left. \begin{array}{l} w_0 = A \cdot \text{ch}(0) + B \cdot \text{sh}(0) + C \cdot \cos(0) + D \cdot \sin(0), \\ dw_0/dz = s \cdot A \cdot \text{sh}(0) + s \cdot B \cdot \text{ch}(0) - s \cdot C \cdot \sin(0) + s \cdot D \cdot \cos(0), \\ w_l = A \cdot \text{ch}(sl) + B \cdot \text{sh}(sl) + C \cdot \cos(sl) + D \cdot \sin(sl), \\ dw_l/dz = s \cdot A \cdot \text{sh}(sl) + s \cdot B \cdot \text{ch}(sl) - s \cdot C \cdot \sin(sl) + s \cdot D \cdot \cos(sl); \\ \text{или (при нулевом аргументе } \text{ch}(0) = \cos(0) = 1, \text{sh}(0) = \sin(0) = 0) \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{array}{l} A + C = 0, \\ s \cdot B + s \cdot D = 0, \\ A \cdot \text{ch}(sl) + B \cdot \text{sh}(sl) + C \cdot \cos(sl) + D \cdot \sin(sl) = 0, \\ s \cdot A \cdot \text{sh}(sl) + s \cdot B \cdot \text{ch}(sl) + s \cdot C \cdot \sin(sl) + s \cdot D \cdot \cos(sl) = 0. \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

Полученные уравнения однородные и имеют нулевое решение, если определитель системы не равен нулю. Это означало бы, что колебания отсутствуют. Поэтому, чтобы получить ненулевое решение необходимо определитель системы приравнять нулю, то есть ($\lambda = sl$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & s \\ \text{ch}(\lambda) & \text{sh}(\lambda) & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ s \text{sh}(\lambda) & s \text{ch}(\lambda) & s \sin(\lambda) & s \cos(\lambda) \end{vmatrix} = 0; \quad (2.14)$$

Раскроем определитель и упростим его. После раскрытия скобок и приведения подобных, получим так называемое характеристическое уравнение

$$1 - \text{ch}(\lambda) \cos(\lambda) = 0, \quad (2.15)$$

корни которого равны (здесь мы снова вернули значок i , который может принимать целые значения от 1 до ∞):

$$\lambda_i = s_i l = (0.5 + i) \cdot \pi, (\lambda_1 = 4.73, \lambda_2 = 7.85, \lambda_3 = 11.00 \text{ и т.д.}).$$

При таких значениях λ_i существует ненулевое решение (2.8). Учитывая, что $s = \sqrt[4]{\frac{m \varpi^2}{EI}}$, найдем по параметру λ_i частоту собственных колебаний:

$$\varpi_i = \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (2.16)$$

Подставив ϖ_i или $\lambda_i = s_i l$ в (2.12) найдем постоянные интегрирования A_i, B_i, C_i, D_i . Но так при этом определитель системы равен нулю - она имеет бесконечное множество решений. Приходится считать одну из постоянных известной (например, $A_i = A$) и выразить все остальные через нее:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= A, \\ B_i &= -A \frac{ch(\lambda_i) - \cos(\lambda_i)}{sh(\lambda_i) - \sin(\lambda_i)}, \\ C_i &= -A, \\ D_i &= A \frac{ch(\lambda_i) - \cos(\lambda_i)}{sh(\lambda_i) - \sin(\lambda_i)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Функция прогибов, соответствующая одной из частот с учетом полученных постоянных, может быть представлена в виде:

$$w_i(z) = A[ch(s_i z) - \cos(s_i z) - \frac{ch(\lambda_i) - \cos(\lambda_i)}{sh(\lambda_i) - \sin(\lambda_i)}(sh(s_i z) - \sin(s_i z))]. \quad (2.18)$$

Эта функция с точностью до постоянного множителя определяет форму колебаний, соответствующую i -той частоте. Совокупность этих функций называют **главными формами колебаний**.

Конструкции с распределенной массой имеют бесконечный спектр частот и соответствующих им форм. В практике расчетов используются главные формы, соответствующие наиболее низким частотам. Они вносят наибольший вклад в расчетные характеристики зданий и сооружений.

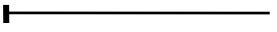

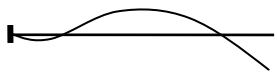
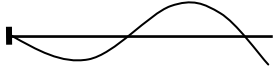
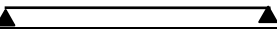
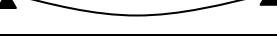
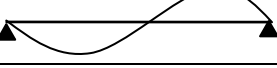

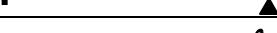
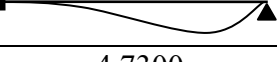

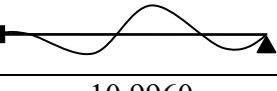
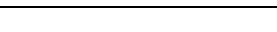

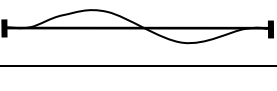
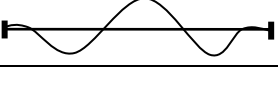
В табл. 2.1 приведены справочные данные по динамическим характеристикам балок с различными закреплениями.

Пример 2 (для самостоятельного решения). Определить частоты и формы колебаний свободно-опертого по двум концам стержня постоянно-го поперечного сечения длиной l .

Таблица 2.1

Значения параметра λ_i для определения частот собственных попе-

речных колебаний простых балок по формуле $\varpi_i = \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$

Характеристики, схема балки	Номер формы колебаний i		
	1	2	3
λ_i форма 	1.8751 	4.6941 	7.8555 
λ_i форма 	3.1416 	6.2832 	9.4248 
λ_i форма 	3.9266 	7.0685 	10.2102 
λ_i форма 	4.7300 	7.8532 	10.9960 

2.4. Ортогональность главных форм колебаний

Главные формы колебаний обладают замечательным свойством - **ортогональностью**. Докажем это свойство. Для этого обратимся к первому уравнению (2.8) и запишем его для двух произвольных частот и соответствующих им форм колебаний:

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^4 w_i}{dz^4} - m \cdot \varpi_i^2 w_i &= 0, \\ EI \frac{d^4 w_k}{dz^4} - m \cdot \varpi_k^2 w_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Умножив первое из них на w_k , а второе на w_i , вычтем второе из первого и проинтегрируем по длине стержня:

$$\int_0^l EI \left(\frac{d^4 w_i}{dz^4} w_k - \frac{d^4 w_k}{dz^4} w_i \right) dz - (\varpi_i^2 - \varpi_k^2) \int_0^l m \cdot w_i w_k dz = 0. \quad (2.20)$$

Заметим, что первый интеграл полученного уравнения (2.20) при любых граничных условиях равен нулю. Это устанавливается интегрированием его по частям³:

$$\begin{aligned} & \int_0^l EI \left(\frac{d^4 w_i}{dz^4} w_k - \frac{d^4 w_k}{dz^4} w_i \right) dz = \\ &= EI \left. \frac{d^3 w_i}{dz^3} w_k \right|_0^l - EI \left. \frac{d^3 w_k}{dz^3} w_i \right|_0^l - EI \left. \frac{d^2 w_i}{dz^2} \frac{dw_k}{dz} \right|_0^l + EI \left. \frac{d^2 w_k}{dz^2} \frac{dw_i}{dz} \right|_0^l + \\ &+ \int_0^l EI \left(\frac{d^2 w_i}{dz^2} \frac{d^2 w_k}{dz^2} - \frac{d^2 w_k}{dz^2} \frac{d^2 w_i}{dz^2} \right) dz = 0. \end{aligned}$$

Действительно, последний интеграл равен нулю тождественно, а первые четыре слагаемых выражают произведение усилий и перемещений по концам стержня, в котором хотя бы один из сомножителей равен нулю. В консольной балке, например, у опоры равны нулю прогиб и угол наклона (производная по z), а на конце консоли равны нулю изгибающий момент и поперечная сила (вторая и третья производные по z).

Второй интеграл (2.20) также равен нулю в тех случаях, когда частоты разные по величине. И только при $\varpi_i = \varpi_k$ интеграл может быть не равен нулю, так как равна нулю разность частот. То есть при $\varpi_i \neq \varpi_k$ главные формы колебаний удовлетворяют соотношению

$$\int_0^l m \cdot w_i w_k dz = 0 \quad \text{при} \quad \varpi_i \neq \varpi_k, \quad (2.21)$$

которое принято называть условием, или *свойством ортогональности*.

2.5. Разложение функции по главным формам колебаний

Ортогональность главных форм колебаний позволяет раскладывать произвольную функцию в ряд. Например, пусть дана функция (распределенная нагрузка) $q(z, t)$. Представим её в виде разложения по формам колебаний:

³ Бронштейн И.В., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1956.

$$q(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \cdot m(z) \cdot w_k(z). \quad (2.22)$$

Каждый член суммы включает произведение пока неизвестного коэффициента разложения $q_k(t)$, зависящего от времени - t , на известные функции от координат - массу и главную форму, соответствующую частоте с номером члена суммы. Вычислим коэффициенты разложения через заданную функцию. Для этого умножим обе части (2.22) на w_i и проинтегрируем полученное выражение по всей длине стержня

$$\int_0^l q(z, t) \cdot w_i(z) dz = \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \cdot m(z) \cdot w_k(z) \cdot w_i(z) dz.$$

В правой части полученного выражения интеграл суммы заменим суммой интегралов и вынесем за знак интеграла коэффициенты разложения, не зависящие от координат. Тогда с учетом ортогональности форм (формула (2.21)) из всей суммы останется только тот член, в котором $k = i$, то есть:

$$\int_0^l q(z, t) \cdot w_k(z) dz = q_k(t) \int_0^l m(z) \cdot w_k^2(z) dz.$$

Откуда получим формулу для определения коэффициентов разложения:

$$q_k(t) = \frac{\int_0^l q(z, t) \cdot w_k(z) dz}{\int_0^l m(z) \cdot w_k^2(z) dz}. \quad (2.23)$$

С помощью δ - функции⁴ можно записать (2.23) и для сосредоточенных функций. При этом

$$q(z, t) = P(t) \cdot \delta(a) \\ \text{и} \quad \int_0^l q(z, t) \cdot w_k(z) dz = P(t) \cdot w_k(a).$$

⁴ Дельта функция, или функция Дирака на всем интервале имеет нулевое значение, кроме точки $z = a$, в которой она равна единице. То есть функция $q(z) = P\delta(a)$ выражает сосредоточенную функцию в точке с координатой $z = a$. Интеграл от этой функции $\int P \delta(a) w(z) dz = P w(a)$.

Тогда коэффициент разложения (2.23) представится в виде:

$$q_k(t) = \frac{P(t) \cdot w_k(a) dz}{\int_0^l m(z) \cdot w_k^2(z) dz}. \quad (2.24)$$

Коэффициенты разложения зависят от изменения нагрузки в пространстве. Изменение их во времени совпадает с заданным. Об этом говорит то, что при их определении интегрирование проводится по пространственным координатам.

Зависимость перемещений во времени дает решение временного уравнения, которое получается при разложении перемещений по формам колебаний и разделении переменных, проводимых по процедуре подобной предыдущим выводам (см. п. 2)

$$EI \frac{1}{m \cdot w} \cdot \frac{d^4 w_i}{dz^4} = - \frac{\frac{d^2 \Phi_i}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{d \Phi_i}{dt} - q_i}{\Phi_i} = -\omega^2$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^4 w_i}{dz^4} - m \cdot \varpi_i^2 w_i &= 0, \\ \ddot{\Phi}_i + 2\alpha_i \cdot \dot{\Phi}_i + \varpi_i^2 \Phi_i &= q_i. \end{aligned} \right\}$$

Решение временного уравнения состоит из суммы общего и частного решений:

$$\Phi_i = A_i \cdot \exp(-\alpha_i \cdot t) \cdot \sin(\varpi_i + \varphi_i) - \frac{1}{\varpi_i} \int_0^t q_i \cdot \exp(-\alpha_i(t-u)) \cdot \sin(\varpi_i(t-u)) du. \quad (2.25)$$

2.6. Действие вибрационной нагрузки⁵

Пусть на стержень в точке с координатой $z = a$ действует сосредоточенная сила, изменяющаяся по закону синуса:

⁵ Вибрационная (гармоническая) нагрузка (лат. vibratio - колебания) изменяется по периодическому (гармоническому) закону во времени, например, по закону синуса или косинуса: $P(t) = P \sin(\mathcal{G} \cdot t)$. Она, в частности, вызывается механизмами, имеющими неуровновешенные массы вращающихся частей.

$$P(t) = P \cdot \sin(\mathcal{G} \cdot t) \quad (2.26)$$

Тогда решение временного уравнения примет вид

$$\Phi_i = A_i \cdot \exp(-\alpha_i t) \cdot \sin(\varpi_i + \varphi_i) - \frac{1}{\varpi_i} \frac{P \cdot w_i(a)}{\int_0^l m \cdot w_i^2 dz} \int_0^t \sin(\mathcal{G} \cdot u) \cdot \exp(-\alpha_i(t-u)) \cdot \sin(\varpi_i(t-u)) du.$$

После того, как будет взят интеграл и принято во внимание то, что общее решение при нулевых начальных условиях и на некотором протяжении затухает, это решение упростится

$$\Phi_i = \boxed{-\frac{P}{\varpi_i^2} \cdot \frac{w_i(a)}{\int_0^l m \cdot w_i^2 dz} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\mathcal{G}^2}{\varpi_i^2})^2 + 4 \frac{\alpha^2 \cdot \mathcal{G}^2}{\varpi_i^4}}} \cdot \sin(\mathcal{G} \cdot t + \varphi)} \quad (2.27)$$

Выражение, обведенное рамкой в (2.27) не зависит от времени, и так как синус любого аргумента не может быть больше единицы, то представляет собой амплитуду колебаний. Амплитуда движения (колебания) зависит от коэффициента формы

$$\eta_i(a) = \frac{w_i(a)}{\int_0^l m \cdot w_i^2 dz}$$

и динамического коэффициента

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\mathcal{G}^2}{\varpi_i^2})^2 + 4 \frac{\alpha^2 \cdot \mathcal{G}^2}{\varpi_i^4}}},$$

зависящего от отношения частоты возмущающей силы к собственной частоте и коэффициента затухания - α .

Зависимость динамического коэффициента от степени затухания и отношения частот показана в табл. 2.2 и на рис. 2.3.

Как видно из графика (рис. 2.3), при малом сопротивлении движению (малом затухании) и равенстве частот возмущающей силы и собственных колебаний амплитуда (перемещения и усилия) движения стремится к бесконечности. Это явление называют **резонансом**. Для строительных конструкций резонансные явления недопустимы.

Таблица 2.2

Динамический коэффициент μ при вибрационной нагрузке в зависимости от коэффициента затухания - α и отношения частоты возмущающей силы - ϑ к частоте собственных колебаний - ϖ

α	$\vartheta/\varpi = 0$	$\vartheta/\varpi = 0.5$	$\vartheta/\varpi = 1.0$	$\vartheta/\varpi = 1.5$	$\vartheta/\varpi = 2.0$
0	1	1.33	∞	0.80	0.33
0.1	1	1.31	3.16	0.75	0.33
0.2	1	1.28	2.22	0.70	0.32
0.3	1	1.25	1.82	0.68	0.32
0.4	1	1.22	1.58	0.64	0.32
0.5	1	1.20	1.41	0.61	0.32
1.0	1	1.10	1.00	0.52	0.32
2.0	1	0.98	0.71	0.41	0.21

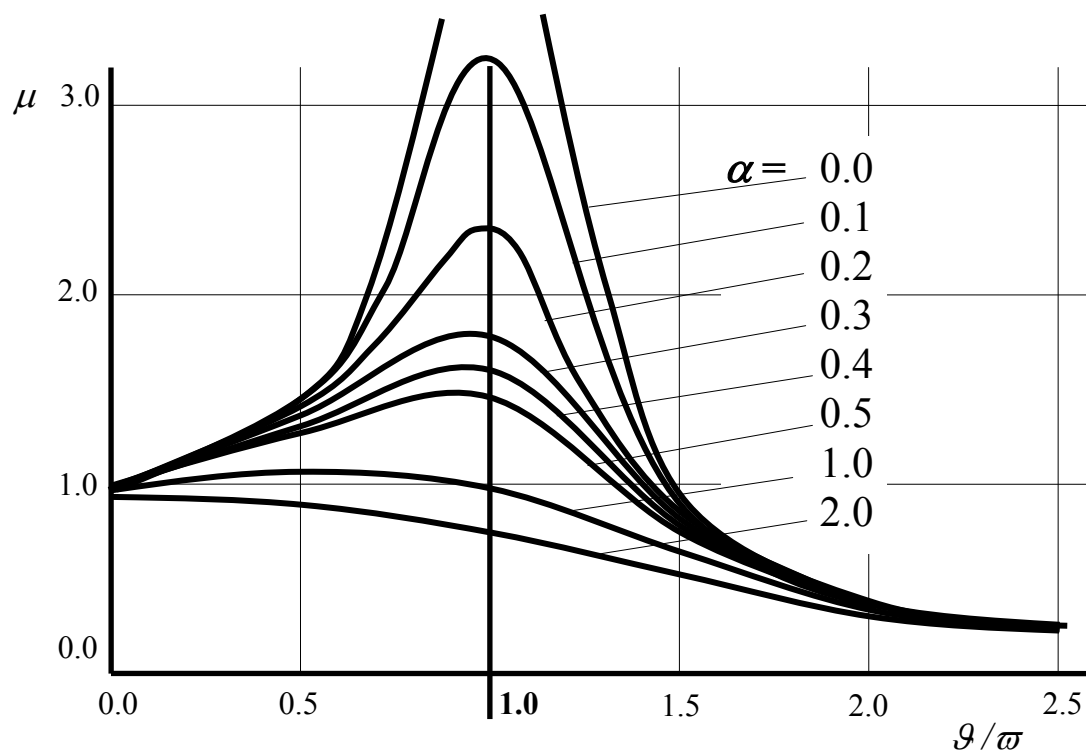


Рис.2.3. Частотные кривые при вибрационной нагрузке

2.7. Описание движения стержня с сосредоточенными массами

Часто в сооружении массы сосредоточены, например, в уровне перекрытий или покрытий зданий. Иногда приближенно заменяют распределенную массу системой сосредоточенных масс. Для таких систем имеются автоматизированные комплексы для получения частот и форм колебаний системы. Одна из таких программ для консольных стержней разработана авторами настоящего учебника⁶. Решение по этой программе приближенное. Но как показали математические эксперименты первые частоты и формы получаются практически точными при замене распределенной массы семью сосредоточенными по длине стержня.

Уравнения движения могут быть получены с помощью численных методов решения уравнений (2.4) и (2.8), но их можно вывести и отдельно, следуя процедуре, рассмотренной ранее.

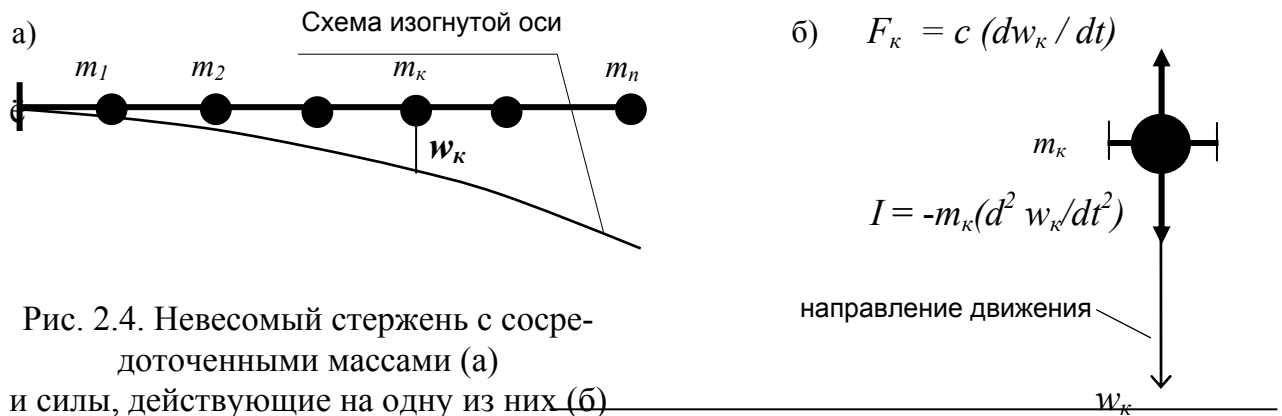


Рис. 2.4. Невесомый стержень с сосредоточенными массами (а) и силы, действующие на одну из них (б)

Рассмотрим стержень с n сосредоточенными массами (рис. 2.4). Вырежем одну из них, например, массу k , и рассмотрим ее равновесие в инерционной среде. На массу действуют:

- сила сопротивления движению согласно гипотезе внутреннего трения (гипотезе Фогта) пропорциональная скорости движения и направлена в сторону противоположную перемещению:

$$F_k = c (dw_k / dt), \quad (2.28)$$

где c - коэффициент пропорциональности, (dw_k / dt) - скорость движения, w_k - перемещение, t - текущее время;

⁶ Программа «Динамика» (программа составлена на языке «BASIC»), Владивосток, 1995г. В ней при отыскании собственных значений и векторов реализован степенной метод и метод исчерпывания для симметричных матриц. Эти методы описаны, например, в книге: И.С. Березин, Н.П. Жидков. Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1962.

- сила инерции, которая в соответствии с принципом Д'Аламбера и известному закону Ньютона пропорциональна ускорению движения

$$I = -m_k(d^2 w_k/dt^2), \quad (2.29)$$

где m_k – величина сосредоточенной массы, $d^2 w_k/dt^2$ – ускорение движения.

Перемещение w_k массы m_k с учетом сил, действующих на все массы равно:

$$w_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} (c(\frac{dw_i}{dt} + m_i \frac{d^2 w_i}{dt^2})); (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.30)$$

где δ_{ki} – перемещение точки k от сил, действующих на массу i .

Уравнение (2.30) для стержня с сосредоточенными массами эквивалентно уравнению (2.4) для стержня с распределенной массой.

2.8. Решение уравнения движения стержня с сосредоточенными массами

Уравнение (2.30) соответствует свободным колебаниям стержня (отсутствуют внешние силы). Его решение, как и ранее, представим в виде разложения в ряд, в котором суммируются произведения функции w_{jk} , зависящей только от координаты, и $\Phi_j(t)$, зависящей от времени:

$$w_k = \sum_{j=1}^{\infty} w_{jk}(z) \cdot \Phi_j(t). \quad (2.31)$$

Если каждый член разложения (2.31) удовлетворяет уравнению (2.29), то полная сумма является его решением, то есть после подстановки произведения $w_{jk} \cdot \Phi_j$ в (2.29) получим

$$w_{jk} \cdot \Phi_j = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} (k(\frac{dw_{ji}}{dt} + m_i \frac{d^2 w_{ji}}{dt^2})); (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.32)$$

или после разделения переменных:

$$\frac{w_{jk}}{\sum_{i=1}^n \delta_{ki} m_i w_{ji}} = - \frac{\frac{d^2 \Phi_j}{dt^2} + \frac{k}{m_i} \cdot \frac{d\Phi_j}{dt}}{\Phi_j} = \omega^2; (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.33)$$

Левая часть (2.33) не зависит от времени, а правая от координаты. Равенство может сохраняться, если каждая из них - величина постоянная. Обозначим ее - ω^2 . Приравняв каждую часть (2.33) постоянной величине получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta_{ki} m_i w_{ji} - m \cdot \frac{w_{jk}}{\omega^2} &= 0; (k = 1, 2, \dots, n), \\ \ddot{\Phi} + 2\alpha \cdot \dot{\Phi} + \omega^2 \Phi &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

(здесь отброшен значок j , заменены производные по времени традиционными обозначениями $\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \ddot{\Phi}$; $\frac{d\Phi}{dt} = \dot{\Phi}$ и введена постоянная $2\alpha = k/m_i$).

Второе уравнение в (2.34) называют, как и ранее, **временным уравнением**. Оно имеет то же решение⁷ и смысл коэффициентов (рис. 2.2):

$$\Phi = A \cdot \exp(-\alpha t) \cdot \sin(\varpi t + \varphi), \quad (2.35)$$

2.9. Частоты и формы колебаний. Разложение нагрузки по формам колебаний

Первые уравнения (2.34) называют **уравнениями форм колебаний** или **частотными уравнениями**. Полученные уравнения однородные и имеют нулевое решение, если определитель системы не равен нулю. Это значит, что колебания отсутствуют, поэтому чтобы получить ненулевое решение, необходимо определитель системы приравнять нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - \lambda & \delta_{12}m_2 \dots & \delta_{1k}m_k & \delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - \lambda \dots & \delta_{2k}m_k & \delta_{2n}m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1}m_1 & \delta_{k2}m_2 \dots & \delta_{kk}m_1 - \lambda \dots & \delta_{kn}m_n \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_n & \delta_{nk}m_n & \delta_{nn}m_n - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.36)$$

(здесь $\lambda = 1/\omega^2$).

⁷ Бронштейн И.В., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. - М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1956.

Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976

В результате раскрытия определителя получим полином n – ой степени, через корни которого находятся частоты:

$$\omega_j = \sqrt{\frac{1}{\lambda_j}} \quad (2.37)$$

(здесь мы снова вернули значок j , который может принимать значения от 1 до n).

Каждой частоте соответствует своя форма колебаний. Для того, чтобы ее получить, необходимо каждую из полученных частот подставить в систему уравнений (2.34) и решить эту систему. В результате получим перемещения всех точек сосредоточения масс системы с точностью до произвольной постоянной величины.

Эти формы обладают свойством ортогональности, которое записывается в виде (по сравнению с условием ортогональности (2.18) только заменяется интеграл суммой):

$$\sum_{k=1}^n m_k \cdot w_{ki} w_{kj} = 0 \quad \text{при} \quad \omega_i \neq \omega_j, \quad (2.38)$$

Любая сосредоточенная внешняя нагрузка может быть разложена по формам колебаний в виде

$$P_k(t) = \sum_{j=1}^n P_j(t) \cdot m_k \cdot w_{kj}, \quad (2.39)$$

при этом коэффициенты разложения определяются по формуле

$$P_j(t) = \frac{\sum_{k=1}^n P_k(t) \cdot w_k}{\sum_{k=1}^n m_k \cdot w_k^2}. \quad (2.40)$$

При вибрационной нагрузке в системах с сосредоточенными массами также возможен резонанс.

2.10. Примеры получения частот и форм колебаний для стержней с сосредоточенными массами

Пример 2.3. Определить частоты и формы колебаний свободно опертой балки с двумя одинаковыми сосредоточенными массами, находящимися в третях пролета (рис. 2.5). Жесткость балки постоянна.

Р е ш е н и е. Найдем перемещения, входящие в (2.36).

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_{11} = \delta_{22} &= \frac{l}{3 \cdot 6EI} \left(0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{l}{9} \cdot \frac{l}{9} + \frac{2l}{9} \cdot \frac{2l}{9} \right) + \\
 &+ \frac{2l}{3 \cdot 6EI} \left(\frac{2l}{9} \cdot \frac{2l}{9} + 4 \cdot \frac{l}{9} \cdot \frac{l}{9} + 0 \cdot 0 \right) = \frac{24}{729} \cdot \frac{l^3}{EI} = \frac{48}{1458} \cdot \frac{l^3}{EI}, \\
 \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{l}{3 \cdot 6EI} \left(0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{l}{9} \cdot \frac{l}{18} + \frac{l}{9} \cdot \frac{2l}{9} \right) + \\
 &+ \frac{l}{3 \cdot 6EI} \left(\frac{l}{9} \cdot \frac{2l}{9} + 4 \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{l}{6} + \frac{2l}{9} \cdot \frac{l}{9} \right) + \frac{l}{3 \cdot 6EI} \left(\frac{2l}{9} \cdot \frac{l}{9} + 4 \cdot \frac{l}{18} \cdot \frac{l}{9} + 0 \cdot 0 \right) = \\
 &= \frac{7}{489} \cdot \frac{l^3}{EI} = \frac{21}{1458} \cdot \frac{l^3}{EI}.
 \end{aligned} \right\}$$

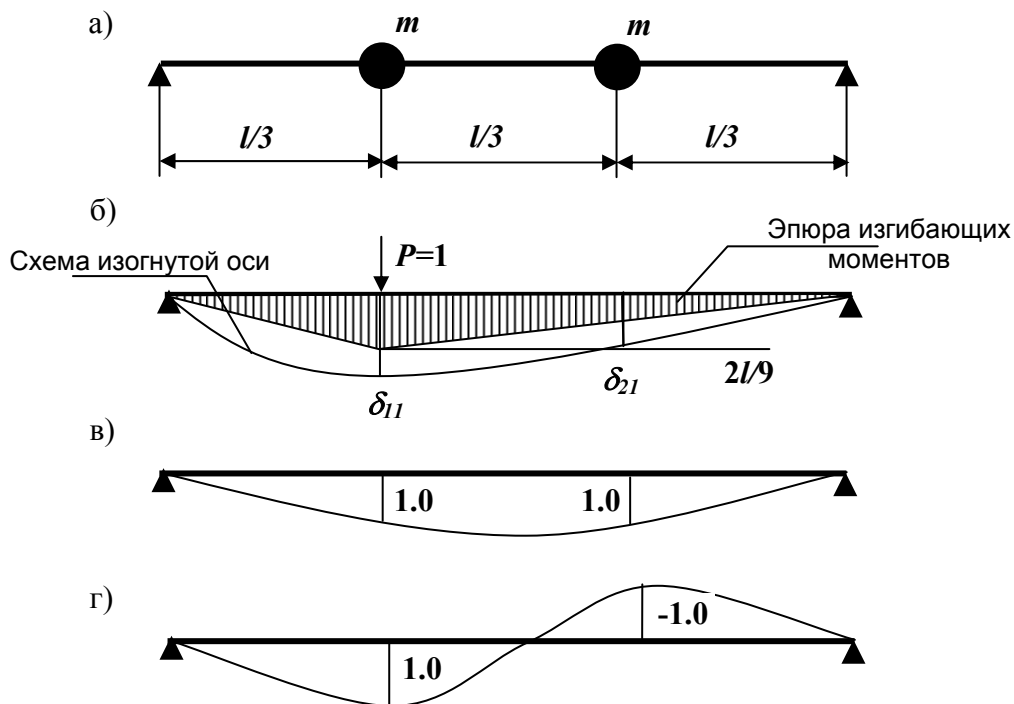


Рис. 2.5. Балка с двумя сосредоточенными массами

а – расчетная схема балки,

б – схема изогнутой оси и эпюра моментов от единичной силы,

в – первая форма колебаний, соответствующая частоте, $\omega_1 = 4.6 \sqrt{\frac{EI}{m \cdot l^3}}$,

г – вторая форма колебаний, соответствующая частоте $\omega_2 = 6.27 \sqrt{\frac{EI}{m \cdot l^3}}$

Интегрирование проведено методом Симпсона⁸.
Система уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\delta_{11} - \frac{1}{\omega_j^2})m \cdot w_{j1} + \delta_{12} \cdot m \cdot w_{j2} &= 0, \\ \delta_{21}m \cdot w_{j1} + (\delta_{22} - \frac{1}{\omega_j^2}) \cdot m \cdot w_{j2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

однородна, и имеет ненулевое решение, когда определитель системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} - \frac{1}{\omega_j^2})m & \delta_{12} \cdot m \\ \delta_{21}m & (\delta_{22} - \frac{1}{\omega_j^2}) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель, предварительно вынесем общий множитель его элементов $\left(\frac{1}{1458} \cdot \frac{m \cdot l^3}{EI}\right)^2$ и так как он не равен нулю, то

$$\begin{vmatrix} (48 - \gamma_j) & 21 \\ 21 & (48 - \gamma_j) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.42)$$

где введено обозначение $\gamma_j = \frac{1458}{\omega_j^2} \cdot \frac{EI}{m \cdot l^3}$,

тогда определитель будет равен

$$(48 - \gamma_j) \cdot (48 - \gamma_j) - 21^2 = \gamma_j^2 - 96\gamma_j + 1863 = 0, \quad (2.43)$$

а его корни определятся по известным формулам решения квадратного трехчлена:

$$\left. \gamma_1 \right\} = 48 \pm \sqrt{2304 - 1863} = 48 \pm 21 = \begin{cases} 69 \\ 27 \end{cases}.$$

⁸ Стоценко А.А., Доценко С.И., Тони Ченз, Серж Рудченко. Теория сооружений. Строительная механика. Ч. 1. Теория сооружений в инженерном деле. Приложения и дополнения. – Владивосток, 2001.

Определим частоты, исходя из того, что $\gamma_j = \frac{1458}{\omega_j^2} \cdot \frac{EI}{m \cdot l^3}$.

Первая (низшая) частота

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1458}{\gamma_1} \cdot \frac{EI}{m \cdot l^3}} = \sqrt{\frac{1458}{69} \cdot \frac{EI}{m \cdot l^3}} = 4.60 \sqrt{\frac{EI}{m \cdot l^3}} \text{ (сек}^{-1}\text{)}.$$

Вторая частота

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1458}{\gamma_2} \cdot \frac{EI}{m \cdot l^3}} = \sqrt{\frac{1458}{27} \cdot \frac{EI}{m \cdot l^3}} = 7.35 \sqrt{\frac{EI}{m \cdot l^3}} \text{ (сек}^{-1}\text{)}.$$

Каждой частоте соответствует своя форма. Чтобы упростить вычисления, умножим каждое из уравнений на $\frac{1}{1458} \cdot \frac{m \cdot l^3}{EI}$. В результате получим для каждой частоты систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\left. \begin{aligned} (48 - \gamma_1) \cdot w_{11} + 21 \cdot w_{12} &= 0 \\ 21 \cdot w_{11} + (48 - \gamma_j) \cdot w_{12} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

При $\gamma_1 = 69$

$$\left. \begin{aligned} -21 \cdot w_{11} + 21 \cdot w_{12} &= 0 \\ +21 \cdot w_{11} - 21 \cdot w_{12} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

так как определитель системы равен нулю, то она имеет бесконечное множество решений, поэтому зададимся значением одной из координат, например, $w_{11} = 1.0$. Тогда вторая координата определится из любого уравнения системы $w_{12} = 1.0$.

Подобным образом получим вторую форму при $\gamma_2 = 27$:

$$\left. \begin{aligned} 21 \cdot w_{21} + 21 \cdot w_{22} &= 0 \\ 21 \cdot w_{21} + 21 \cdot w_{22} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Теперь зададимся значением одной из координат, например, $w_{21} = 1.0$. Тогда вторая координата определится из любого уравнения системы $w_{22} = -1.0$.

Графически формы колебаний представлены на рис. 2.5.

Пример 2.4 (для самостоятельного решения). Определить частоты и формы колебаний консольного стержня с двумя массами, одна из них (посередине стержня) в два раза больше другой (на конце его). Жесткость стержня постоянная.

2.11. Приведение рамных сооружений к точечным консольного типа

Для приближенной замены рамного сооружения консолью необходимо решить две проблемы.

- определить методику нахождения величины массы пространственной или плоской рамы и места ее расположения по высоте (вдоль консоли),
- найти жесткость консольного стержня исходя из конструктивной схемы сооружения.

Эти проблемы часто решаются интуитивно, с учетом опыта работы с динамическими схемами, но могут быть даны и некоторые рекомендации их решения путем логических рассуждений.

Если, например, имеется многоэтажное здание с довольно массивными перекрытиями и оборудованием на нем, то можно достаточно обоснованно утверждать, что вся масса здания сосредоточена в уровне перекрытий и покрытия. Наибольший вклад в величину массы внесут масса самого перекрытия и оборудования, которое находится на нем. Масса ограждений мала по сравнению с массой перекрытия и она может быть отнесена к ближайшему из них по принципу равной ответственности, подобно тому, как распределяется нагрузка между несущими элементами при ее сборе⁹.

Более сложной является вторая проблема. Здесь нужно иметь ввиду то, что динамические характеристики зависят от перемещений (для точечных сооружений от горизонтальных перемещений). Чтобы динамические характеристики (частоты и формы), полученные из расчета консольного стержня были близки к характеристикам рамного сооружения, необходимо чтобы горизонтальные перемещения консоли и сооружения в уровне перекрытий были одинаковы. Из этого условия можно получить жесткости частей консольного стержня.

Имеются предложения - жесткость консоли назначать равной сумме жесткостей стоек. Однако такое решение не всегда правомерно. Специально проведенные исследования показали, что величина жесткости консоли зависит не только от жесткостей стоек, но и ригелей и способов соединений (узлов) элементов в сооружении.

Покажем применение приведенных выше рекомендаций на примерах.

⁹ Стоценко А.А., Доценко С.И., Тони Ченз, Серж Рудченко. Теория сооружений. Строительная механика. Ч. 1. Теория сооружений в инженерном деле. Раздел 1. Концепция сил в строительной механике. – Владивосток, 2001.

Пример 2.5. Построить упрощенную расчетную схему для получения динамических характеристик многоэтажного здания (рис. 1.6). Шаг рам 6 м. Жесткость одной колонны на первом и втором этажах - 1200 кНм^2 ; на остальных этажах - 800 кНм^2 . Ригели к стойкам крепятся шарнирно.

Решение. Расчетная схема здания - консольный стержень с массами, сосредоточенными в уровне перекрытий. Для получения динамических характеристик необходимо знать жесткость заменяющего раму стержня и величины сосредоточенных масс.

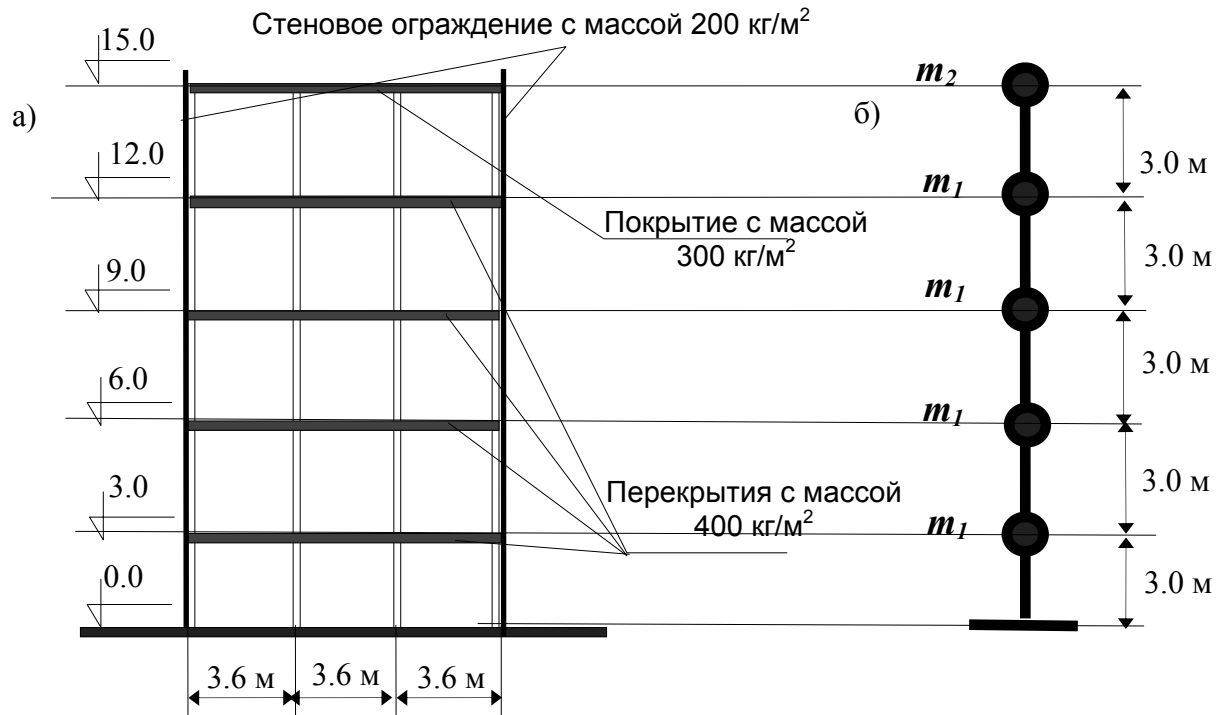


Рис. 2.6. Пятиэтажное трехпролетное здание:
а - схема поперечной рамы; б - упрощенная расчетная схема

Жесткость на изгиб консольного стержня должна приниматься из условия, чтобы горизонтальные перемещения стержня и рамы в уровне перекрытий были одинаковы. Часто для этого достаточно просто сложить жесткости стоек в пределах этажа. Следовательно, жесткость стержня на первых двух этажах равна

$$EI = 4 \cdot 1200 = 4800 \text{ кНм}^2,$$

на верхних этажах

$$EI = 4 \cdot 800 = 3200 \text{ кНм}^2.$$

Сосредоточенные в уровне перекрытий массы подсчитаем по заданным удельным массам перекрытий и стеновых ограждений (см. рис. 2.6) и грузовым площадям при шаге рам - 6 м, трех пролетах рамы длиной - 3.6 м, высоте этажа - 3 м:

$$m_1 = 200 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 + 400 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = 33120 \text{ кг},$$

$$m_2 = 200 \cdot 1.5 \cdot 6 \cdot 2 + 400 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = 29520 \text{ кг}.$$

П р и м е р 2.6. Определить жесткость консоли в упрощенной расчетной схеме в одноэтажной раме при шарнирном и жестком креплении ригеля к стойкам из условия равенства горизонтальных перемещений ригеля (рис. 2.7).

Р е ш е н и е. Перемещение по горизонтали в уровне ригеля при шарнирном его креплении к стойкам от сосредоточенной силы ригеля - P (на каждую стойку передается сила пропорциональная ее жесткости):

$$\delta_k = \delta_1 = \delta_2 = \frac{P(EI_{c1})l^3}{(EI_{c1} + EI_{c2}) \cdot 3EI_{c1}} = \frac{P(EI_{c2})l^3}{(EI_{c1} + EI_{c2}) \cdot 3EI_{c2}} = \frac{Pl^3}{3(EI_{c1} + EI_{c2})} = \frac{Pl^3}{3EI_k},$$

то есть, жесткость консоли должна быть равна сумме жесткостей стоек:

$$EI_k = EI_{c1} + EI_{c2}.$$

При жестком креплении бесконечно жесткого ригеля верхние концы стоек не поворачиваются и перемещения уменьшаются в четыре раза:

$$\delta_k = \delta_1 = \delta_2 = \frac{P(EI_{c1}) \cdot l^3}{(EI_{c1} + EI_{c2}) \cdot 12EI_{c1}} = \frac{P(EI_{c2}) \cdot l^3}{(EI_{c1} + EI_{c2}) \cdot 12EI_{c2}} = \frac{Pl^3}{12(EI_{c1} + EI_{c2})} = \frac{Pl^3}{3EI_k},$$

то есть жесткость консоли должна быть равна учетверенной сумме жесткостей стоек:

$$EI_k = 4(EI_{c1} + EI_{c2}).$$

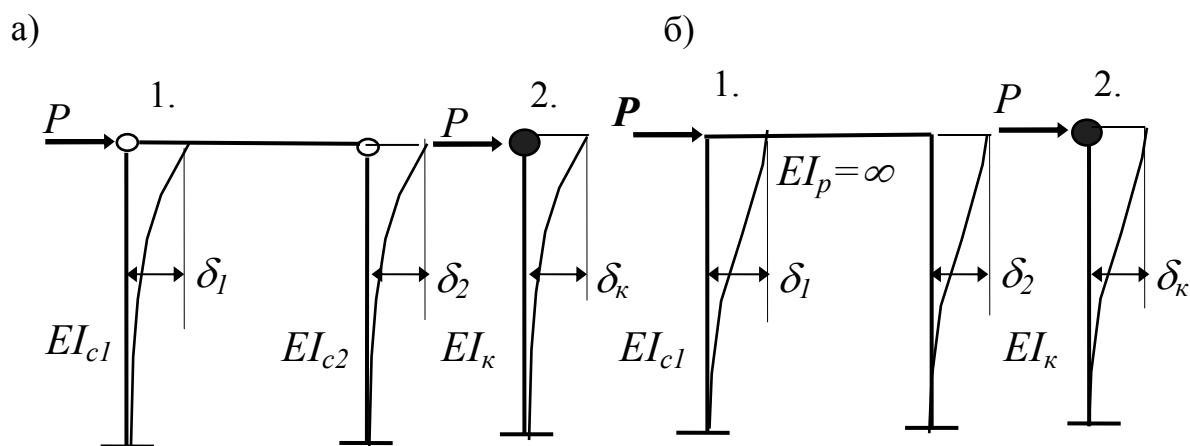


Рис. 2.7. Схемы рам с шарнирным (а) и жестким (б) креплением ригеля к стойкам:

1 – рама; 2 – заменяющая консоль

Существуют, однако, попытки совместного решения проблем внешних сил и внутренних усилий - *динамический* подход. Но эта сложная в математическом отношении и реализации задача решается очень редко. Примером могут служить решения, полученные одним из авторов учебника для арочных плотин и гидробиотехнических сооружений^{10,11}.

¹⁰ Стоценко А.А. Расчет арочных плотин на сейсмические воздействия: дис. канд. техн. наук. – Л., 1969.
Стоценко А.А. Гидробиотехнические сооружения. - Владивосток: изд-во ДВГУ, 1984.

¹¹ Гидробиотехнические сооружения - специальные гидротехнические сооружения, предназначенные для оснащения морских плантаций по культивированию ценных видов водных организмов.